

Zobecněný Riemannův integrál

Definice (Zobecněný Riemannův integrál). Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*, a < b$ a nechť funkce f je definována na intervalu (a, b) . Má-li funkce f Riemannův integrál na každém podintervalu $[x, y] \subseteq (a, b)$ a existuje-li $c \in (a, b)$ takové, že limity $\lim_{x \rightarrow a+} \int_x^c f$ a $\lim_{y \rightarrow b-} \int_c^y f$ existují a jejich součet má smysl, pak definujeme **zobecněný Riemannův integrál** funkce f na intervalu (a, b) jako

$$\int_a^b f = \lim_{x \rightarrow a+} \int_x^c f + \lim_{y \rightarrow b-} \int_c^y f.$$

Zobecněný Riemannův integrál je lineární a aditivní a z definice plyne, že na něj můžeme aplikovat metody známé z Riemannova integrálu, jak jsme jej znali doteď - substituce, per partes apod.

$$\int_a^b f \begin{cases} \text{existuje a je roven} & \begin{cases} \text{reálnému číslu, tj. konverguje,} \\ +\infty \text{ nebo } -\infty, \text{ tj. diverguje} \end{cases} \\ \text{neexistuje.} \end{cases}$$

Věta 6.10. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*, a < b$, f je spojitá na (a, b) a F je primitivní funkce k f na (a, b) . Pak zobecněný Riemannův integrál funkce f na (a, b) existuje právě tehdy, když existují limity $\lim_{x \rightarrow a+} F(x)$ a $\lim_{x \rightarrow b-} F(x)$ a jejich rozdíl má smysl. V tom případě platí

$$\int_a^b f = [F]_a^b := \lim_{x \rightarrow b-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a+} F(x).$$

Věta 6.6 (linearita zobecněného Riemannova integrálu). Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*, a < b$, f a g jsou funkce mající zobecněný Riemannův integrál na intervalu (a, b) a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

(i) funkce αf má zobecněný Riemannův integrál na (a, b) a platí

$$\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f,$$

má-li pravá strana smysl.

(ii) **je-li součet** $\int_a^b f + \int_a^b g$ **definovaný**, pak má funkce $f + g$ zobecněný Riemannův integrál na (a, b) a platí $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

Co již známe z Riemannova integrálu

Funguje notace: $\int_a^b f = - \int_b^a f$.

Věta (per partes). Nechť u, v jsou spojitě funkce na I . Pak platí

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v.$$

Věta (substituce). Buď F primitivní funkce k funkci f na intervalu (a, b) a φ diferencovatelná funkce na (α, β) . Je-li $\varphi((\alpha, \beta)) \subset (a, b)$, pak platí

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) \text{ pro } x \in (\alpha, \beta).$$

Parciální zlomky

Jak na parciální zlomky: <https://math.fel.cvut.cz/mt/txttd/3/txc3db3i.htm>

Rozklad na parciální zlomky

- funguje v případě, že číselník je nižšího řádu, než jmenovatel - pokud tomu tak není, tak nejdříve provedeme dělení polynomu polynomem
- jmenovatele rozložíme na součin - co nejvíc to jde, dostaneme nejvýše kvadratické činitele
- napíšu *zadaný zlomek* = součet zlomků takto:
 - ve jmenovateli je $(ax + b)^n \implies$ napravo napíšu $\frac{A_1}{ax+b} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$
 - ve jmenovateli je $(ax^2 + bx + c)^n \implies$ napravo napíšu $\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$
- získanou rovnici přenásobím jmenovatelem
- upravím do tvaru $\dots = (\dots)x^n + (\dots)x^{n-1} + \dots + (\dots)x + (\dots)$
- provonám koeficienty u stejných mocnin $x \rightarrow$ soustava
- vyřeším soustavu $\rightarrow$ dostanu hodnoty A_i, B_i

Poznámka. Při rozkladu jmenovatele: pokud kvadratický trojčlen lze rozložit na součin, tak jej rozložíme (jinak by mohl vyjít zlomek, který nelze zintegrovat).

Návod/nápověda

- číselník alespoň stejného stupně, než jmenovatel $\rightarrow$ dělení mnohočlenu mnohočlenem
- rozklad na parciální zlomky
- $\int \frac{1}{(ax+b)^n} dx \rightarrow$ substituce
- $\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n} dx \rightarrow$ substituce
- $\int \frac{1}{ax^2+b} dx \rightarrow$ substitucí převedeme na $\int \frac{1}{y^2+1} dy$
- $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx \rightarrow$ doplněním na čtverec, převedeme na předchozí případ
- $\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n} dx \rightarrow \int \frac{1}{(u^2+1)^n} \rightarrow$ substituce $u = \tan t$

Goniometrické substituce

!!! Vždy je třeba si hlídat definiční obory !!!

Nechť $R(\cdot, \cdot)$ je racionální funkce dvou proměnných (jde o podíl dvou polynomů dvou proměnných).

- $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \implies t = \cos x, dt = -\sin x dx$
- $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \implies t = \sin x, dt = \cos x dx$
- $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \implies t = \tan x$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

Pak

$$dx = \frac{1}{t^2 + 1} dt, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1 + t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + t^2}, \quad \sin x \cos x = \frac{t}{1 + t^2}$$

- Vždy: $t = \tan \frac{x}{2}$ pro $x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

Pak

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Odmocniny

Nechť $R(\cdot, \cdot)$ je racionální funkce dvou proměnných (jde o podíl dvou polynomů dvou proměnných).

U níže uvedených substitucí: k dopočtu dt nejdříve vyjádříme x v závislosti na t a pak teprve derivujeme (vizte příklad níže)

- $R(x, \sqrt[m]{x+a}), m \in \mathbb{N}, m > 1, \implies t = \sqrt[m]{x+a}$
- $R(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}), m \in \mathbb{N}, m > 1, a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad \neq bc \implies t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$
- $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$
 - $ax^2+bx+c = a(x-x_1)^2 \implies \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}|x-x_1|$
 - $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) \implies t = \sqrt{a \frac{x-x_1}{x-x_2}}$
 - ax^2+bx+c nemá kořen $\implies t = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm x\sqrt{a}$

Poznámka. Vyskytuje-li se v integrálu více odmocnin, převedeme je na mocniny téže odmocniny (např. $\sqrt{x}$ a $\sqrt[3]{x}$ převedeme na $(\sqrt[6]{x})^3$ a $(\sqrt[6]{x})^2$).

Příklad. $t = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$

$$t^2 = \frac{x+1}{x-2} \implies t^2(x-2) = x+1 \implies x(t^2-1) = 1+2t^2 \implies x = \frac{2t^2+1}{t^2-1}$$

$$x = \frac{2t^2+1}{t^2-1} \implies dx = \frac{4t(t^2-1) - (2t^2-1)2t}{(t^2-1)^2} dt = \frac{4t^3-4t-4t^3-2t}{(t^2-1)^2} dt = \frac{-6t}{(t^2-1)^2} dt$$